

Ioan-Florin Bugariu
Cristinel Severin
Georgiana Cârlogea

Matematică pentru încredere și reușită

Înțelegere. Exersare. Succes

Clasa a VI-a

II



Cuprins

Capitolul V

Noțiuni geometrice fundamentale

1	Unghiul. Recapitulare	9
2	Unghiuri opuse la vârf; unghiuri formate în jurul unui punct; unghiuri suplimentare; unghiuri complementare	17
3	Unghiuri adiacente; bisectoarea unui unghi	33
Teste recapitulative		
	Test 1	43
	Test 2	44
4	Drepte paralele; axioma paralelelor; criterii de paralelism (unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă)	45
5	Drepte perpendiculare în plan; oblice; distanța de la un punct la o dreaptă; mediatoarea unui segment; simetria față de o dreaptă	56
Teste recapitulative		
	Test 1	71
	Test 2	72
6	Cerc (definiție, construcție); elemente în cerc: centru, rază, coardă, diametru, arc de cerc; unghi la centru; măsuri	73
7	Pozițiile unei drepte față de un cerc; pozițiile relative a două cercuri	81
Teste recapitulative		
	Test 1	88
	Test 2	88
Formule și rezultate utile		89

Capitolul VI

Triunghiul

1	Triunghiul: definiție, elemente; clasificare; perimetru; suma măsurilor unghiurilor unui triunghi; unghi exterior unui triunghi, teorema unghiului exterior	97
2	Construcția triunghiurilor: cazurile LUL, ULU, LLL; inegalități între elementele triunghiului (observate din cazurile de construcție)	119
Teste recapitulative		
	Test 1	131
	Test 2	132
3	Linii importante în triunghi: bisectoarele unghiurilor unui triunghi; concurență (fără demonstrație), cercul înscris în triunghi; mediatoarele laturilor unui triunghi: concurență (fără demonstrație), cercul circumscris unui triunghi	133
4	Linii importante în triunghi: înălțimile unui triunghi: definiție, construcție, concurență (fără demonstrație); medianele unui triunghi: definiție, construcție, concurență (fără demonstrație)	148

Teste recapitulative	
Test 1	159
Test 2	160
5 Congruența triunghiurilor oarecare: criterii de congruență a triunghiurilor: LUL, ULU, LLL; criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice: CC, IC, CU, IU	161
6 Metoda triunghiurilor congruente, aplicații: proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi/mediatoarea unui segment	173
Teste recapitulative	
Test 1	180
Test 2	181
7 Proprietăți ale triunghiului isoscel; proprietăți ale triunghiului echilateral	182
8 Proprietăți ale triunghiului dreptunghic (cateta opusă unghiului de 30° , mediana corespunzătoare ipotenuzei – teoreme directe și reciproce); teorema lui Pitagora (fără demonstrație, verificări de triplete de numere pitagoreice, determinarea de lungimi folosind pătratele unor numere naturale)	193
Teste recapitulative	
Test 1	203
Test 2	204
Formule și rezultate utile	205
Soluții	211

Competențe generale

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date
6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

Competențe specifice

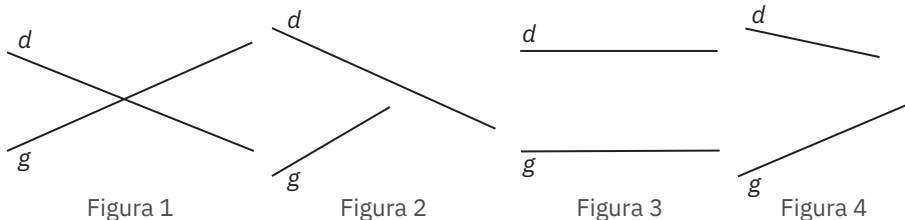
- 1.1. Identificarea unor noțiuni specifice mulțimilor și relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$
- 1.2. Identificarea rapoartelor, proporțiilor și a mărimilor direct sau invers proporționale
- 1.3. Identificarea caracteristicilor numerelor întregi în contexte variate
- 1.4. Recunoașterea fracțiilor echivalente, a fracțiilor ireductibile și a formelor de scriere a unui număr rațional
- 1.5. Recunoașterea unor figuri geometrice plane (drepte, unghiuri, cercuri, arce de cerc) în configurații date
- 1.6. Recunoașterea unor elemente de geometrie plană asociate noțiunii de triunghi
- 2.1. Evidențierea în exemple a relațiilor de apartenență, de incluziune, de egalitate și a criteriilor de divizibilitate cu 2, 5, 10^n , 3 și 9 în $\mathbb{N}$
- 2.2. Prelucrarea cantitativă a unor date utilizând rapoarte și proporții pentru organizarea de date
- 2.3. Utilizarea operațiilor cu numere întregi pentru rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor
- 2.4. Aplicarea regulilor de calcul cu numere raționale pentru rezolvarea ecuațiilor de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ ($a \neq 0$), $ax + b = c$, unde a , b și c sunt numere raționale
- 2.5. Recunoașterea coliniarității unor puncte, a faptului că două unghiuri sunt opuse la vârf, adiacente, complementare sau suplementare și a paralelismului sau perpendicularității a două drepte
- 2.6. Calcularea unor lungimi de segmente, măsuri de unghiuri în contextul geometriei triunghiului
- 3.1. Utilizarea unor modalități adecvate de reprezentare a mulțimilor și de determinare a c.m.m.d.c. și a c.m.m.m.c.
- 3.2. Aplicarea unor metode specifice de rezolvare a problemelor în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct/invers proporționale
- 3.3. Aplicarea regulilor de calcul și folosirea parantezelor în efectuarea operațiilor cu numere întregi
- 3.4. Utilizarea proprietăților operațiilor pentru compararea și efectuarea calculelor cu numere raționale
- 3.5. Utilizarea unor proprietăți referitoare la distanțe, drepte, unghiuri, cerc pentru realizarea unor construcții geometrice
- 3.6. Utilizarea criteriilor de congruență și a proprietăților unor triunghiuri particulare pentru determinarea caracteristicilor unei configurații geometrice
- 4.1. Exprimarea în limbaj matematic a unor situații concrete care se pot descrie utilizând mulțimile și divizibilitatea în $\mathbb{N}$
- 4.2. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor și a mărimilor care apar în probleme cu rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale
- 4.3. Redactarea etapelor de rezolvare a ecuațiilor și a inecuațiilor studiate în mulțimea numerelor întregi
- 4.4. Redactarea etapelor de rezolvare a unor probleme folosind operații în mulțimea numerelor raționale
- 4.5. Exprimarea prin reprezentări geometrice sau în limbaj specific matematic a noțiunilor legate de dreaptă, unghi și cerc
- 4.6. Exprimarea în limbaj geometric simbolic și figurativ a caracteristicilor triunghiurilor și ale liniilor importante în triunghi
- 5.1. Analizarea unor situații date în contextul mulțimilor și al divizibilității în $\mathbb{N}$
- 5.2. Analizarea unor situații practice cu ajutorul rapoartelor, proporțiilor și a colecțiilor de date
- 5.3. Interpretarea unor date din probleme care se rezolvă utilizând numerele întregi
- 5.4. Determinarea unor metode eficiente în efectuarea calculelor cu numere raționale
- 5.5. Analizarea seturilor de date numerice sau a reprezentărilor geometrice în vederea optimizării calculelor cu lungimi de segmente, distanțe, măsuri de unghiuri și de arce de cerc
- 5.6. Analizarea unor construcții geometrice în vederea evidențierii unor proprietăți ale triunghiurilor
- 6.1. Transpunerea, în limbaj matematic, a unor situații date utilizând mulțimi, operații cu mulțimi și divizibilitatea în $\mathbb{N}$
- 6.2. Modelarea matematică a unei situații date în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale
- 6.3. Transpunerea, în limbaj algebric, a unei situații date, rezolvarea ecuației sau inecuației obținute și interpretarea rezultatului
- 6.4. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea operațiilor cu numere raționale
- 6.5. Interpretarea informațiilor conținute în reprezentări geometrice pentru determinarea unor lungimi de segmente, distanțe și a unor măsuri de unghiuri/arce de cerc
- 6.6. Transpunerea, în limbaj specific, a unei situații date legate de geometria triunghiului, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului

4

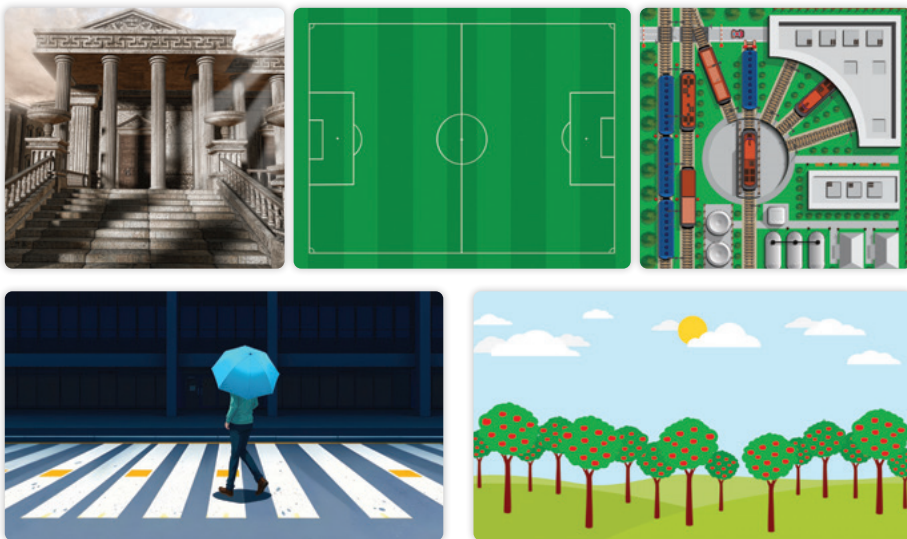
Drepte paralele; axioma paralelelor; criterii de paralelism (unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă)

V.4.1. Drepte paralele

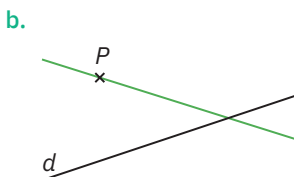
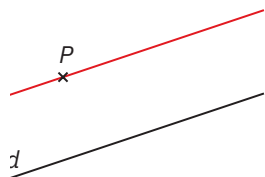
1. Specificați în care dintre figurile 1-4 găsim drepte paralele.



2. Găsiți drepte paralele în următoarele imagini:



3. Fie dreapta d și P un punct exterior acesteia. Desenați:
- o dreaptă care trece prin P și este paralelă cu dreapta d ;
 - o dreaptă care trece prin P și nu este paralelă cu dreapta d .



4. Fie dreapta d și punctele M și N de o parte și de alta a dreptei d . Desenați:
 - a. o dreaptă care trece prin M și este paralelă cu dreapta d și o dreaptă care trece prin N și este concurentă cu d ;
 - b. o dreaptă care trece prin M și este paralelă cu dreapta d și o dreaptă care trece prin N și este paralelă cu d .
5. Fie A , B și C trei puncte necoliniare. Desenați:
 - a. dreapta care trece prin A și este paralelă cu BC ;
 - b. dreapta care trece prin B și este concurentă cu AC ;
 - c. o dreaptă care să treacă prin A , una care să treacă prin B și una care să treacă prin C , astfel încât cele trei drepte să fie paralele.
6. Se dau dreptele d și g , astfel încât $d \parallel g$ și punctele M , N și P sunt exterioare acestora. Știm că $MN \parallel g$ și că dreapta NP este paralelă cu dreapta d .
 - a. Realizați un desen corespunzător.
 - b. Ce putem spune despre punctele M , N și P ?
7. Fie punctele A , B , C coliniare. Desenați:
 - a. câte o dreaptă prin fiecare dintre cele trei puncte, astfel încât cele trei drepte să fie paralele între ele;
 - b. câte o dreaptă prin două dintre puncte, astfel încât aceste drepte să fie paralele, și o dreaptă prin cel de al treilea punct, astfel încât această să fie secantă pentru celelalte două.
8. Citiți enunțurile de mai jos. Dacă sunt adevărate, încercuiți litera **A**, iar dacă sunt false, încercuiți litera **F**.

a. Prin punctul A , exterior dreptei d , putem trasa două drepte paralele cu d .	A F
b. Fie dreptele d , f și g . Dacă $d \parallel g$ și g este concurentă cu f , atunci $d \parallel f$.	A F
c. Fie dreapta d și punctele A și B de o parte și de alta a dreptei d . Atunci $d \parallel AB$.	A F

V.4.2. Unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă

1. Considerăm unghiurile din Figura 5. Completați spațiile punctate cu una dintre expresiile: *alterne interne*, *alterne externe*, *corespondente*, *interne de aceeași parte a secantei*, *externe de aceeași parte a secantei*, pentru a obține propoziții adevărate.

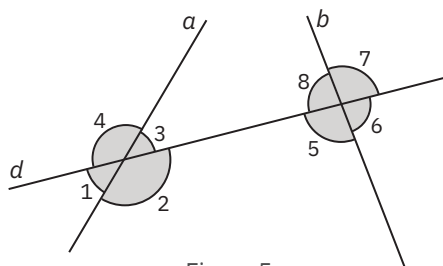


Figura 5

- a. Unghiurile 1 și 5 sunt
- b. Unghiurile 3 și 8 sunt
- c. Unghiurile 4 și 7 sunt
- d. Unghiurile 2 și 8 sunt
- e. Unghiurile 7 și 1 sunt
- f. Unghiurile 3 și 7 sunt
- g. Unghiurile 4 și 6 sunt
- h. Unghiurile 2 și 6 sunt
- i. Unghiurile 3 și 5 sunt



2. Analizați logourile din imaginea de mai jos și specificați în care puteți găsi unghiuri alterne interne, alterne externe sau corespondente.



3. Analizați imaginile de mai jos și specificați în care puteți găsi unghiuri alterne interne, alterne externe sau corespondente.



4. În Figura 6, dreptele AB și DE sunt paralele, iar unghiul DOF are măsura egală cu 50° . Determinați măsurile celorlalte unghiuri din figură. Ne reamintim că, dacă tăiem două drepte cu o secantă, se formează 8 unghiuri. Deci, pentru a rezolva problema, trebuie să calculăm măsurile a șapte unghiuri.

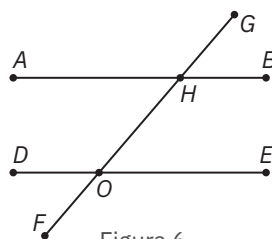


Figura 6

1. Începem cu unghiurile alăturate unghiului DOF . Observăm că unghiul DOF se formează prin intersecția dreptelor DE și FG , deci avem unghiuri opuse la vârf.

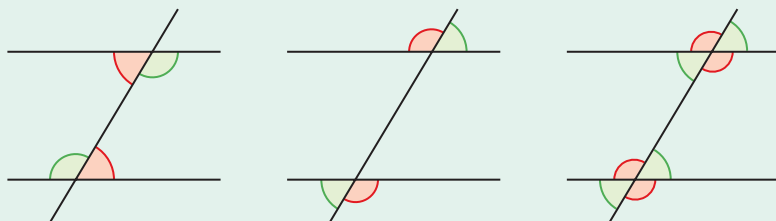
$$\angle DOF = \angle HOE = 50^\circ \text{ și } \angle DOF + \angle DOH = 180^\circ \Rightarrow \angle DOH = 130^\circ.$$

În plus, $\angle DOH = \angle FOE = 130^\circ$ (ca unghiuri opuse la vârf). În acest moment, am calculat toate unghiurile formate de dreapta DE și secanta FG .

2. Trecem la unghiurile formate de dreapta AB și secanta FG .

Ne reamintim perechile de unghiuri congruente:

Unghiuri alterne interne Unghiuri alterne externe Unghiuri corespondente



În consecință, avem $\angle DOF = \angle GHB = 50^\circ$ și $\angle FOE = \angle AHG = 130^\circ$, ca unghiuri alterne externe, și $\angle DOH = \angle BHO = 130^\circ$ și $\angle HOE = \angle AHO = 50^\circ$, ca unghiuri alterne interne.

5. Determinați unghiurile din Figura 6, știind că $AB \parallel DE$ și:

- a. $\angle AHG = 110^\circ$; b. $\angle GHB = 38^\circ$;
c. $\angle DOH = 145^\circ$; d. $\angle FOE = 101^\circ 30'$.

6. În Figura 7, avem $AB \parallel GH$, $ED \parallel IJ$ și $\angle AKE = 100^\circ$. Determinați măsurile unghiurilor NKL , KLM , LMN și MNK .

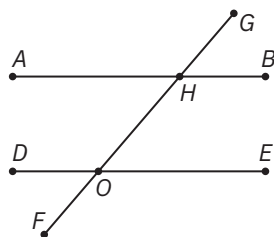


Figura 6

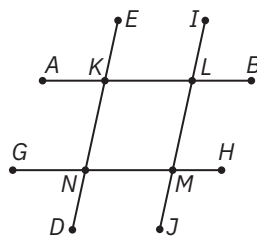
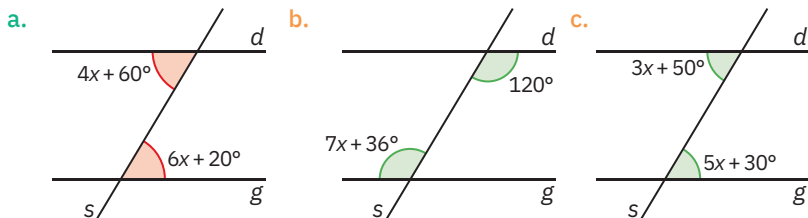


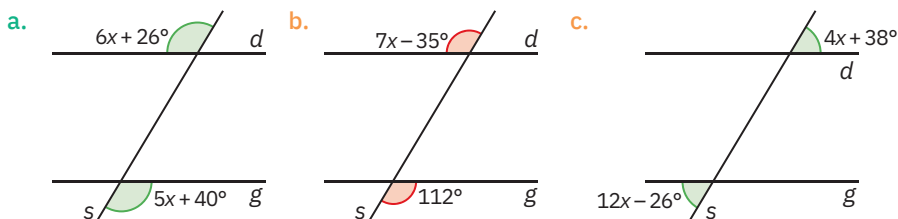
Figura 7

7. Pentru fiecare dintre figurile a-c, determinați valoarea lui x , știind că $d \parallel g$.



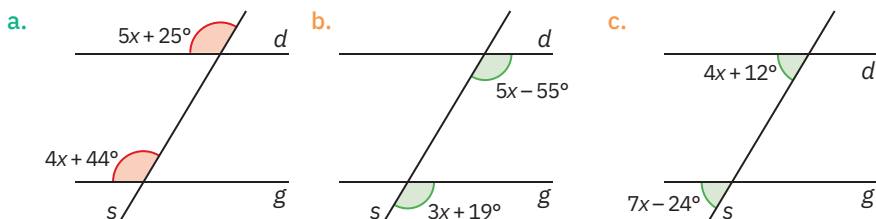
- a. Cum $d \parallel g$, deducem că unghiurile alterne interne sunt congruente. În consecință, obținem relația $6x + 20^\circ = 4x + 60^\circ \Leftrightarrow 6x - 4x = 60^\circ - 20^\circ \Leftrightarrow 2x = 40^\circ \Leftrightarrow x = 20^\circ$.

8. Pentru fiecare dintre figurile a-c, determinați valoarea lui x , știind că $d \parallel g$.



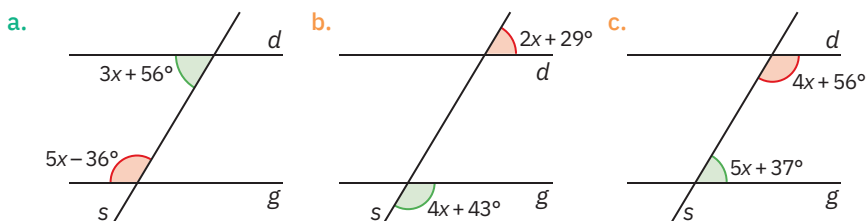
- a. Cum $d \parallel g$, deducem că unghiurile alterne externe sunt congruente. În consecință, obținem relația $6x + 26^\circ = 5x + 40^\circ \Leftrightarrow 6x - 5x = 40^\circ - 26^\circ \Leftrightarrow x = 14^\circ$.

9. Pentru fiecare dintre figurile a-c, determinați valoarea lui x , știind că $d \parallel g$:



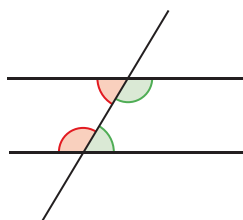
- a. Cum $d \parallel g$, deducem că unghiurile corespondente sunt congruente. În consecință, obținem relația $5x + 25^\circ = 4x + 44^\circ \Leftrightarrow 5x - 4x = 44^\circ - 25^\circ \Leftrightarrow x = 19^\circ$.

10. Pentru fiecare dintre figurile a-c, determinați valoarea lui x , știind că $d \parallel g$.

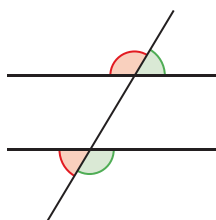


Ne reamintim: dacă unghiurile sunt de aceeași parte a secantei, fie în interior, fie în exterior, atunci ele sunt suplementare.

Unghiuri interne de aceeași parte a secantei



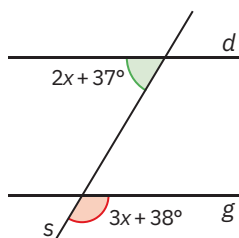
Unghiuri externe de aceeași parte a secantei



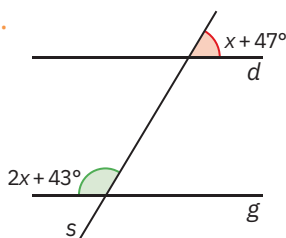
a. Cum $d \parallel g$, deducem că unghiurile interne de aceeași parte a secantei sunt suplementare. În consecință, obținem relația $3x + 56^\circ + 5x - 36^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 8x + 20^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 8x = 160^\circ \Leftrightarrow x = 20^\circ$.

11. Pentru fiecare dintre figurile a-c, determinați valoarea lui x , știind că $d \parallel g$.

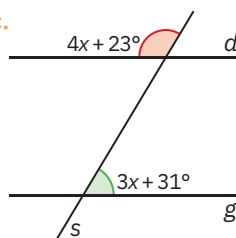
a.



b.



c.



Observăm că perechile de unghiuri marcate nu fac parte din categoriile de unghiuri învățate până acum (alterne interne, alterne externe sau corespondente). Problemele de acest gen se rezolvă în doi pași.

1. Știm că secanta formează cu fiecare dintre cele două drepte paralele perechi de unghiuri opuse la vârf, adică congruente. Căutăm unghiul opus la vârf cu unghiul marcat cu roșu.

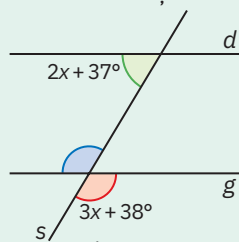


Figura 8

2. În Figura 8, unghiul roșu și unghiul albastru sunt opuse la vârf, deci congruente. În consecință, în loc să ne raportăm la relația dintre unghiul roșu și unghiul verde, ne vom raporta la relația dintre unghiul albastru și unghiul verde. Mai exact, avem de-a face cu unghiuri interne de aceeași parte a secantei, adică suplementare. În consecință, obținem relația: $2x + 37^\circ + 3x + 38^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 5x + 75^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 5x = 105^\circ \Leftrightarrow x = 21^\circ$.